Απειροστικός III – Φυλλάδιο Ασκήσεων 5

Άσκηση 1. *Βρείτε παραμετρικοποιήσεις για τις καμπύλες:*

(i) $C \subset \mathbb{R}^2$ *που πάει κατά μήκος του γραφήματος* $y = \sin x$ *από* $x = 0$ *έως* $x = \pi$ *και μετά κατά μήκος του άξονα* x *έως την αρχή των αξόνων.*

(ii) $C \subset \mathbb{R}^3$ *που αντιστοιχεί στην τομή του επιπέδου* $z = 3$ *με τον κύλινδρο*

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

(iii) *Το τρίγωνο που σχηματίζεται διασχίζοντας από το σημείο* $(1, 2, 3)$ *στο σημείο* $(0, -2, 1)$ *έπειτα στο σημείο* $(6, 4, 2)$ *και πίσω στο* $(1, 2, 3)$.

Άσκηση 2. *Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα:*

(i) *Της συνάρτησης* $f(x, y) = y$ *πάνω στο ημικύκλιο* $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$.

(ii) *Της συνάρτησης* $f(x, y, z) = z$ *πάνω στην καμπύλη* $c(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$, $t \in [0, t_0]$, $t_0 > 0$.

(iii) *Της συνάρτησης* $f(x, y, z) = e^{\sqrt{z}}$ *πάνω στην καμπύλη* $c(t) = (1, 2, t^2)$, $t \in [0, 1]$.

(iv) *Της μονάδας πάνω στην καμπύλη του* $\mathbb{R}^2$ *που δίνεται σε πολικές συντεταγμένες από τον τύπο* $r = 1 + \cos\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Άσκηση 3. *Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα:*

(i) $\int_c x\,dy - y\,dx$, $c(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(ii) $\int_c yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, *όπου η καμπύλη* c *αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν το* $(1, 0, 0)$ *με το* $(0, 1, 0)$ *και το τελευταίο με το* $(0, 0, 1)$.

(iii) $\int_c y\,dx + (3y^2 - x)\,dy + z\,dz$, *όπου* $c(t) = (t, t^3, 0)$, $t \in [0, 1]$.

Άσκηση 4. *Έστω* $c : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ *μία* C^1 *καμπύλη και* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *συνεχές διανυσματικό πεδίο. Δείξτε ότι:*

(i) $\int_c F \cdot ds = 0$, *όταν το* F *είναι κάθετο στο διάνυσμα ταχύτητας της* $c(t)$.

(ii) $\int_c F \cdot ds = \int_c \|F\| ds$, *όταν το* F *έχει την ίδια κατεύθυνση με το διάνυσμα ταχύτητας της* $c(t)$.

Άσκηση 5. (i) *Έστω* C^1 *συνάρτηση* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *και* C^1 *καμπύλη* $c : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ *που ενώνει τα σημεία* $A = c(a)$, $B = c(b)$. *Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα* $\int_c \nabla f \cdot ds$, *όπου* ∇f *είναι το gradient της* f.

(ii) *Έστω ότι η καμπύλη* c *πάει από το σημείο* $(1, 1, 1)$ *στο* $(1, 2, 4)$. *Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα*

$$\int_c 2xyz\,dx + x^2 z\,dy + x^2 y\,dz.$$

(iii) *Έστω η δύναμη (βαρυτικού πεδίου)*

$$F(x, y, z) = -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

Δείξτε ότι το έργο της δύναμης F *κατά μήκος της τροχιάς ενός σωματιδίου από το σημείο* (x_1, y_1, z_1) *στο σημείο* (x_2, y_2, z_2) *εξαρτάται μόνο από τις ακτίνες* $R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$, $R_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.
[Υπόδειξη: Υπολογίστε το gradient της συνάρτησης $f(x, y, z) = \frac{1}{\rho}$, *όπου* $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$*.]*